

TRIGONOMÉTRIE

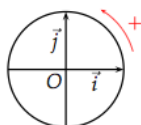
Ce chapitre va traiter des fonctions trigonométriques.
Je vais vous donner un tas de formules. Oui, je sais, il y en a énormément. Vous devez toutes les connaître.

www.mathsbook.fr

I - DÉFINITIONS

Les fonction trigonométriques s'utilisent sur un cercle.

Définition : Soit un repère orthonormal $(O; I; J)$. On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O , de rayon 1, orienté dans le **sens positif** (ou **sens direct**).

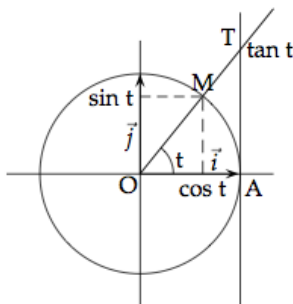


Remarque : Attention, le sens positif est le sens contraire au aiguilles d'une montre. Ne me demandez pas pourquoi, c'est une convention mathématiques.

A présent, je vais vous expliquer comment repérer l'abscisse et l'ordonnée d'un point sur ce cercle trigonométrique.

Définitions : Soit un repère orthonormal $(O; I; J)$.

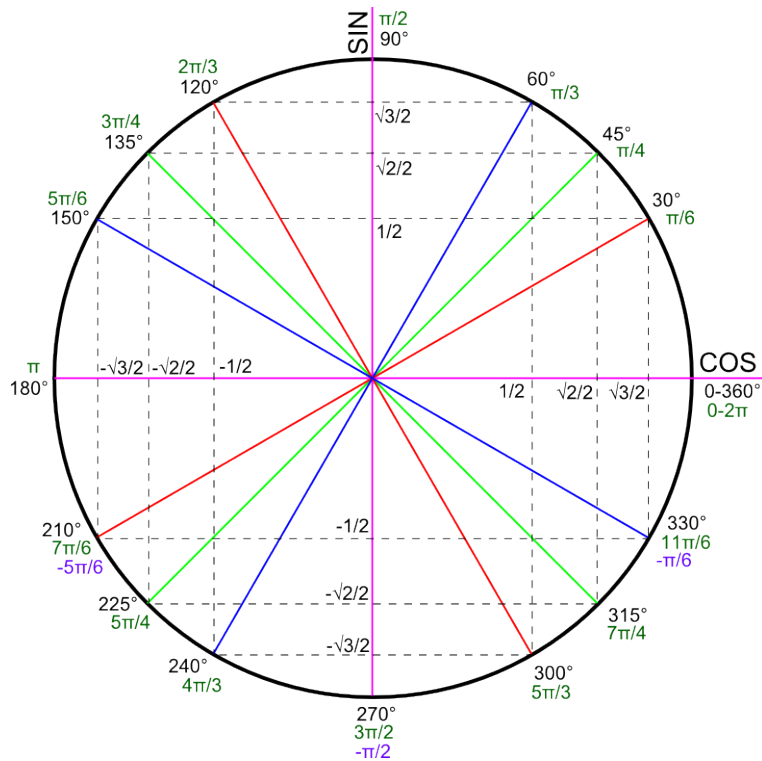
On appelle **cosinus de x** , noté $\cos x$, l'abscisse du point M appartenant au cercle trigonométrique, et **sinus de x** , noté $\sin x$, l'ordonnée de ce point M .



Voici un tableau avec toutes les coordonnées importantes des points sur ce cercle trigonométrique, en fonction de l'angle.

Degrés	0	30	45	60	90	120	135	150	180
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Par exemple, un point M faisant un angle de 30° avec l'horizontal (l'axe des abscisses), soit un angle de $\frac{\pi}{6}$, aura comme coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.



II - PROPRIÉTÉS

Celles-ci, vous les connaissiez déjà (normalement).

Propriétés fondamentales : Pour tout réel x ,

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Pour les fonction trigonométriques, on aura tendance à écrire $\sin^2 x$ au lieu de $(\sin x)^2$. Ce n'est qu'une notation.

Je vais vous donner d'autres propriétés importantes. Sachez que c'est très simple de les retrouver.

Par exemple, en voici une :

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

C'est la parité. La fonction $\cos$ est une fonction paire.

Voici les autres.

Propriétés : Pour tout réel x ,

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \cos(x) \\ \sin(-x) &= -\sin(x) \\ \cos(\pi - x) &= -\cos(x) \\ \sin(\pi - x) &= \sin(x) \\ \cos(\pi + x) &= -\cos(x) \\ \sin(\pi + x) &= -\sin(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= -\sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= \cos(x)\end{aligned}$$

Pour les retrouver, prenez un petit angle.

Par exemple, un angle de $\frac{\pi}{6}$.

Rajoutez-lui 90° , soit un angle de $\frac{\pi}{2}$. Vous verrez que le cosinus deviendra le sinus négatif de l'angle de départ et que le sinus deviendra le cosinus de l'angle de départ.

III - FORMULES TRIGONOMÉTRIQUES

Voilà ma section préféré.

Vous allez devoir retenir les centaines et les centaines de formules suivantes.

Je plaisante. Il n'y a pas énormément.

Formules d'addition : Pour tout réels a et b ,

$$\begin{aligned}\cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a\end{aligned}$$

Formules de duplication : Pour tout réel a ,

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ \cos 2a &= 2 \cos^2 a - 1 \\ \cos 2a &= 1 - 2 \sin^2 a \\ \sin 2a &= 2 \sin a \cos a \\ \cos^2 a &= \frac{1 + \cos 2a}{2} \\ \sin^2 a &= \frac{1 - \cos 2a}{2}\end{aligned}$$

Ces formules sont tirés des précédentes bien évidemment.

Exercice : Retrouver la formule $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

IV - RÉOLUTION D'ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Nous allons maintenant nous servir de tout cela.

Résolution d'équations trigonométriques : Soit k un entier.

– Résolution de $\cos x = a$:

– Si $|a| > 1$, il n'y a pas de solution,

– $|a| \leq 1$, alors il existe $\alpha \in [0, \pi]$ tel que $\cos \alpha = a$. L'équation devient alors $\cos x = \cos \alpha$ et on a donc :

$$\begin{cases} x &= \alpha/2k\pi \\ &ou \\ x &= -\alpha + 2k\pi \end{cases}$$

– Résolution de $\sin x = a$:

– Si $|a| > 1$, il n'y a pas de solution,

– $|a| \leq 1$, alors il existe $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin \alpha = a$. L'équation devient alors $\sin x = \sin \alpha$ et on a donc :

$$\begin{cases} x &= \alpha + 2k\pi \\ &ou \\ x &= \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$$

Je vais vous donner un exemple de chaque.

Exemple 1 : Résoudre l'équation suivante : $2 \cos 3x + 1 = 0$.

$$2 \cos 3x + 1 = 0 \iff \cos 3x = -\frac{1}{2}$$

Or, $-\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$.

Donc :

$$\cos 3x = -\frac{1}{2} \iff \cos 3x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

D'où :

$$\begin{cases} 3x &= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ &ou \\ 3x &= -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$
$$\begin{cases} x &= \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ &ou \\ x &= -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Exemple 2 : Résoudre l'équation suivante : $\sqrt{2} \sin 3x + 1 = 0$.

$$\sqrt{2} \sin 3x + 1 = 0 \iff \sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Or, $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{-\pi}{4}$.

Donc :

$$\sin 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin 3x = \sin \frac{-\pi}{4}$$

D'où :

$$\begin{cases} 3x &= -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ &ou \\ 3x &= \pi - (-\frac{\pi}{4}) + 2k\pi \end{cases}$$
$$\begin{cases} x &= -\frac{\pi}{12} + 2k\frac{\pi}{3} \\ &ou \\ x &= \frac{5\pi}{12} + 2k\frac{\pi}{3} \end{cases}$$