

# CALCUL ALGÈBRIQUE

Nous savons maintenant très bien ce qu'est une expression algébrique. Oui, c'est une expression mathématiques qui contient une, ou plusieurs, inconnue(s).

[www.mathsbook.fr](http://www.mathsbook.fr)

## I - DÉFINITIONS

Commençons ce chapitre par deux définitions. Nous verrons ensuite comment on procède pour calculer une expression algébrique.

**Définition** : On appelle **valeur numérique** d'une expression algébrique le nombre obtenu, s'il existe, lorsque l'on remplace la (ou les) variable(s) par des nombres.

Exemple : Pour  $x = 1$ , la valeur numérique de l'expression algébrique  $x^2 + 2x + 1$  est 4.

**Définition** : On appelle **valeur interdite** d'une expression algébrique un nombre pour lequel l'expression algébrique n'existe pas.

Exemple : Considérons l'expression algébrique suivante :

$$\frac{x+2}{x-3}$$

Elle n'a de sens que si le dénominateur est différent de 0, c'est-à-dire si :  $x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$ . Donc 3 est la valeur interdite.

On a une valeur interdite quand on a un dénominateur avec une inconnue, mais aussi sous une racine car une racine est toujours positive.

Exemple : Soit l'expression  $\sqrt{x+5}$ . Il faut absolument que ce qu'il y a en dessous de la racine soit positif (ou nul), c'est-à-dire :  $x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$ . Dans ce cas, il y a plus d'une valeur interdite : tous les nombres inférieurs à 5 sont des valeurs interdites.

## II - CALCUL D'UNE EXPRESSION ALGÈBRIQUE

Commençons cette section par quelques rappels de troisième.

**Rappels** : **Développer** un produit le transforme en sommes (ou différences), et **factoriser** une somme de plusieurs produits c'est la rendre en un seul produit.

Voici des formules de 3ème, à gauche la forme factorisée et à droite la forme développée :

$$\begin{aligned}k(a+b) &= ka + kb \\k(a-b) &= ka - kb \\(a+b)(c+d) &= ac + ad + bc + bd \\(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Rajoutons à cela d'autres formules.

**Identités remarquables** :

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\(a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\(a+b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 + b^3 \\(a-b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 - b^3\end{aligned}$$

Je vais vous donner un exemple de développement et un exemple de factorisation dans lesquels je vais tout expliquer la méthode de calcul et de factorisation. soyez attentifs.

Exemple de développement : Soit l'expression suivante :

$$A = (x - 1)^2 - [(x^2 + 3)(x - 2) - 3x]$$

On va calculer cette expression en suivant la méthode suivante :

1ère étape : on développe tout ça.

$$A = (x - 1)^2 - [(x^2 + 3)(x - 2) - 3x]$$

$$A = x^2 - 2x + 1 - (x^3 - 2x^2 + 3x - 6 - 3x)$$

$$A = x^2 - 2x + 1 - (x^3 - 2x^2 - 6)$$

$$A = x^2 - 2x + 1 - x^3 + 2x^2 + 6$$

2ème étape : on range tout ce bazars en mettant les puissances les plus élevés en premières.

$$A = x^2 - 2x + 1 - x^3 + 2x^2 + 6$$

$$A = -x^3 + x^2 + 2x^2 - 2x + 1 + 6$$

3ème étape : on simplifie et on a fini.

$$A = -x^3 + x^2 + 2x^2 - 2x + 1 + 6$$

$$A = -x^3 + 3x^2 - 2x + 7$$

Exemple de factorisation : Soit l'expression suivante :

$$B = (x - 1)^3 + (x + 1)(1 - x)$$

On va factorise cette expression en suivant la méthode suivante :

1ère étape : on cherche le facteur commun. Ici on remarque que  $1 - x = -(x - 1)$ . On a notre facteur commun.

$$B = (x - 1)^3 + (x + 1)(1 - x)$$

$$B = (x - 1)^3 - (x + 1)(x - 1)$$

$$B = (x - 1)[(x - 1)^2 - (x + 1)]$$

2ème étape : on obtient un produit de deux facteurs : le facteur commun qu'on ne touche pas et le second facteur que l'on développe.

$$B = (x - 1)[(x - 1)^2 - (x + 1)]$$

$$B = (x - 1)[x^2 - 2x + 1 - x - 1]$$

$$B = (x - 1)(x^2 - 3x)$$

Remarquons que l'on peut encore factoriser le second facteur. Eh oui, par  $x$ . Allons-y.

$$B = (x - 1)(x^2 - 3x)$$

$$B = x(x - 1)(x - 3)$$

Voilà, l'expression est factorisée au maximum.

Remarque : On factorise le plus souvent pour résoudre une équation ou une inéquation.