

TRIANGLE RECTANGLE ET THÉORÈME DE PYTHAGORE

Dans ce cours sur le **triangle rectangle**, je ne vais pas me contenter de simplement vous définir ce qu'est un triangle rectangle. D'ailleurs, vous savez déjà ce que c'est. En effet, c'est un triangle qui possède un angle droit. Je vais vous apprendre de calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir de la longueur des deux autres côtés. C'est le **théorème de Pythagore**.

On parlera également de **cercle circonscrit** au triangle rectangle et les différentes propriétés qui vont avec.

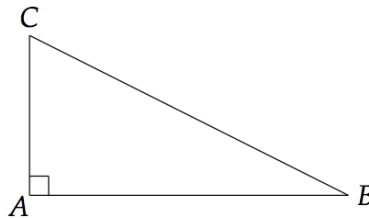
Enfin, une dernière partie introduira une nouvelle notion, celle de **cosinus d'un angle** dans un triangle rectangle. Cela vous servira également à calculer la longueur des côtés du triangle.

www.mathsbook.fr

I - THÉORÈME DE PYTHAGORE

Je vais vous apprendre ce fameux théorème dont tout le monde parle : le **théorème de Pythagore**. Il va vous servir à calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir des longueurs des deux autres. Pratique, non ?

Théorème de Pythagore : Soit un triangle ABC , rectangle en A .



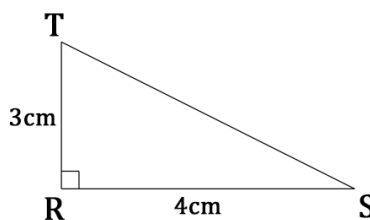
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Ce qui veut dire que la longueur de l'hypoténuse élevée au carré est égale à la somme des carrés des deux autres côtés du triangle.

Attention : Il faut absolument avoir un triangle rectangle.

Exemple : Soit le triangle RST rectangle en R suivant :



Dans ce triangle, on a $RS = 4cm$ et $RT = 3cm$.

Calculer TS .

On a ici un triangle rectangle. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore.

Donc, dans le triangle RST , rectangle en R , d'après le théorème de Pythagore :

$$TS^2 = RS^2 + RT^2$$

Or, $RS = 4cm$ et $RT = 3cm$.

Donc, on peut faire l'application numérique :

$$TS^2 = RS^2 + RT^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$$

Oui mais là on obtient la longueur du côté au carré. Comment reviens à la longueur du côté ?

On fait un coup de **racine carrée** :

$$TS = \sqrt{25} = 5cm$$

Oulala, attendez un peu. Qu'est-ce que c'est que la racine carrée ?

J'attendais cette question. Voici la définition.

Racine carrée : La racine carrée $\sqrt{a}$ du nombre positif a est le nombre positif dont le carré est égal à a :

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

Quand on élève un nombre a au carré, on obtient a^2 . La racine carrée c'est simplement le sens inverse.

Exemple :

$$3^2 = 9$$

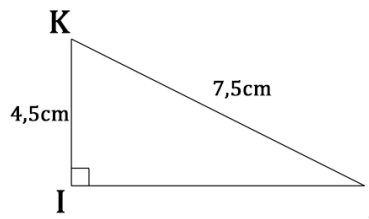
Et donc, en faisant le chemin inverse :

$$\sqrt{9} = 3$$

Vous aurez plus de précisions l'année prochaine, pour votre Brevet.

Remarque : On peut vous demander, parfois, de calculer la longueur d'un autre côté du triangle rectangle.

Exemple : Soit le triangle IJK , rectangle en I , suivant :



Dans ce triangle, on a $IK = 4,5cm$ et $KJ = 7,5cm$.

Calculer IJ .

On a ici un triangle rectangle. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore.

Donc, dans le triangle IJK , rectangle en I , d'après le théorème de Pythagore :

$$KJ^2 = IJ^2 + IK^2$$

Ce qui veut dire que :

$$IJ^2 = KJ^2 - IK^2$$

Eh oui, c'est une simple équation. Donc en faisant passer un terme de droite à gauche, on change tout simplement son signe.

Or, $IK = 4,5cm$ et $KJ = 7,5cm$.

Donc, on peut faire l'application numérique :

$$IJ^2 = KJ^2 - IK^2 = 7,5^2 - 4,5^2 = 56,25 - 20,25 = 36$$

D'où :

$$IJ = \sqrt{36} = 6cm$$

Le théorème de Pythagore peut également servir à montrer qu'un triangle est rectangle.

Réciproque du théorème de Pythagore : Dans un triangle, si la longueur d'un côté au carré est égal à la somme des longueurs des deux autres côtés au carré alors ce triangle est un triangle rectangle et ce côté est l'hypoténuse.

C'est très simple. Prenez un triangle quelconque ABC .

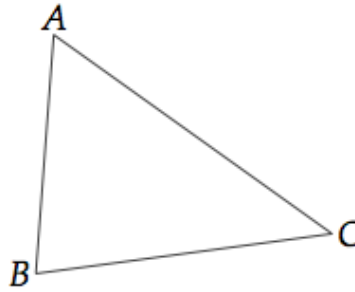
On commence par calculer la longueur du plus grand côté élevée au carré, soit : BC^2 .

On calcule ensuite la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, soit : $AC^2 + AB^2$.

Si, et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle est rectangle et $[BC]$ est son hypoténuse.

Pratique, non ? C'est comme cela que vous devrez raisonner si l'on vous demande de montrer qu'un triangle est rectangle (à condition bien sûr que vous connaissiez les longueurs des trois côtés du triangle).

Exemple : Soit le triangle suivant avec $AB = 4\text{cm}$, $AC = 6,8\text{cm}$ et $BC = 5,5\text{cm}$:



J'ai volontairement dessiné un triangle qui ne ressemble pas du tout à un triangle rectangle.

Calculons donc le carré du plus grand côté de ce triangle, soit le carré de $[AC]$:

$$AC^2 = 6,8^2 = 46,25$$

Calculons maintenant la somme des carrés des deux autres côtés du triangle :

$$AB^2 + BC^2 = 4^2 + 5,5^2 = 16 + 30,25 = 36,25$$

On remarque que :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

Donc, le triangle ABC est un triangle rectangle, d'hypoténuse AC et donc rectangle en B .

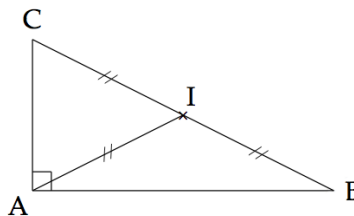
II - CERCLE CIRCONSCRIT AU TRIANGLE RECTANGLE

Plusieurs propriétés importantes dans cette partie sur le **cercle circonscrit au triangle rectangle**.
Déjà, rappelons-nous qu'un cercle circonscrit à un triangle, c'est le cercle qui passe par les trois sommets du triangle.

Je commence par le **théorème de la médiane**.

Théorème de la médiane : Dans un triangle rectangle, la médiane issue de l'angle droit mesure la moitié de l'hypoténuse.

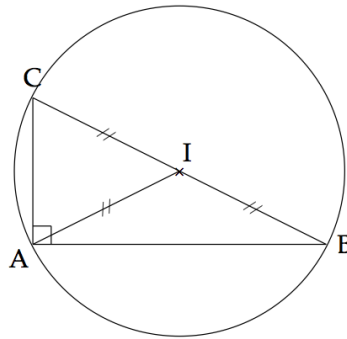
Réciproquement, si la médiane issue d'un sommet d'un triangle mesure la moitié du côté opposé, alors ce triangle est un triangle rectangle.



Pas besoin d'exemple sur ce théorème, il est très clair. Passons à la conséquence directe.

Cercle circonscrit au triangle rectangle : Le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour centre le milieu de l'hypoténuse et donc pour diamètre l'hypoténuse.

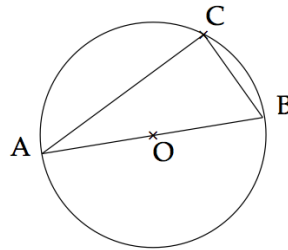
Réciproquement, si l'un des côtés d'un triangle est le diamètre d'un cercle et que son troisième sommet est sur ce même cercle, alors le triangle est rectangle.



Cette propriété se comprend facilement car, dans la figure précédente, les segments $[IA]$, $[IB]$ et $[IC]$ sont en fait des rayons du cercle circonscrit au triangle ABC .

C'est une propriété très intéressante. En effet, prenez un cercle. Alors son diamètre forme un triangle rectangle avec n'importe quel point de ce cercle.

Exemple : Soit un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$. Soit un point C sur ce cercle.



Le triangle ABC est rectangle en C et son hypoténuse est le diamètre $[AB]$ du cercle. Et donc, la médiane issue de C vaut la moitié du segment $[AB]$ car les segments $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$ sont des rayons du cercle circonscrit.

III - COSINUS D'UN ANGLE

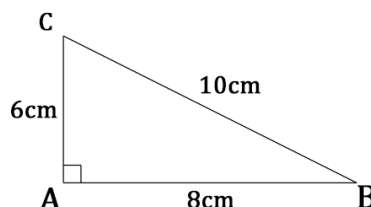
Au premier abord, vous n'allez pas aimer ce mot. Je vous l'accorde. Mais quand vous allez comprendre l'utilité du **cosinus d'un angle**, vous changerez rapidement d'avis.

Cosinus d'un angle : Dans un triangle rectangle, le cosinus d'un angle aigu a , noté $\cos(a)$, est égal à :

$$\cos(a) = \frac{\text{cote adjacent}}{\text{hypotenuse}}$$

Je vous donne un exemple pour que vous compreniez bien tout.

Exemple : Soit le triangle ABC , rectangle en A suivant :



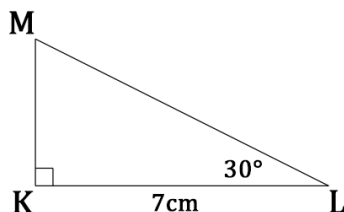
Nous allons calculer le cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$.

Dans le triangle ABC , rectangle en A , on applique la formule :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{10} = 0,8$$

Vous l'aurez compris, ici aussi, le cosinus d'un angle peut nous aider à déterminer la longueur du côté d'un triangle rectangle. En effet, si l'on connaît la valeur du cosinus d'un angle et la mesure d'un autre côté (adjacent à l'angle ou l'hypoténuse), on peut trouver le troisième côté.

Exemple : Soit le triangle KLM , rectangle en K , avec $KL = 7\text{cm}$ et $\widehat{KLM} = 30^\circ$ suivant :



Calculons ML , l'hypoténuse de ce triangle.

On a la mesure de l'angle $\widehat{KLM} = 30^\circ$.

On utilise la calculatrice pour déterminer la valeur du cosinus de cet angle :

$$\cos(\widehat{KLM}) = \cos(30) \approx 0,87$$

Retenez que un cosinus est toujours compris entre -1 et 1. Donc, si vous trouvez une valeur supérieure à 1 ou inférieure à (-1) , vous vous êtes trompé.

De plus, vous trouverez généralement une valeur approximative pour un cosinus. La valeur d'un cosinus n'a pas d'unité.

On continue en appliquant la formule :

$$\cos(\widehat{KLM}) = \frac{KL}{ML}$$

On connaît $\cos(\widehat{KLM})$ et $KL = 7\text{cm}$ et on cherche ML . On résout donc l'équation, tout simplement :

$$ML = \frac{KL}{\cos(\widehat{KLM})}$$

Application numérique :

$$ML = \frac{7}{0,87} = 8\text{cm}$$

Voilà. Une autre méthode pour calculer des angles ou des longueurs de côtés dans un triangle rectangle.

Remarque : Si vous voulez passer du cosinus d'un angle à la valeur de cet angle, il suffit de prendre sa calculatrice et d'utiliser la touche " $\cos^{-1}$ ".